Оценки снизу специальных полиномов

О. А. Кривошеева

Башкирский государственный университет
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, улица Заки Валиди, 32.

Email: kriolesya2006@yandex.ru

В работе рассматриваются кратные последовательности различных комплексных чисел и некоторые их характеристики. В частности, рассматривается индекс конденсации такой последовательности. Этот индекс играет важную роль при исследовании задач интерполяции и фундаментального принципа, а также при решении задачи о распределении особых точек суммы ряда экспоненциальных мономов, расположенных на границе его области сходимости. Получены оценки на специальные полиномы.

Ключевые слова: кратная последовательность комплексных чисел, индекс конденсации.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k. Считаем, что $|\lambda_k|$ не убывает и $|\lambda_k| \to \infty, k \to \infty$. Положим

$$m(\Lambda) = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, n_k/|\lambda_k|.$$

Пусть $B(z,r), S(z,r)$ – открытый круг и окружность с центром в точке z и радиуса r. Введем еще локальную характеристику Λ (см. [1])

$$q_\Lambda(\lambda, w, \delta) = \prod_{\lambda_k \in B(w,\delta|w|)} \left(\frac{\lambda - \lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right)^{n_k}.$$

В случае, когда круг $B(w,\delta|w|)$ не содержит ни одной λ_k, полагаем $q_\Lambda(\lambda, w, \delta) \equiv 1$. Если $\delta \in (0,1)$, то модуль каждого сомножителя функции q_Λ в круге $B(w,\delta|w|)$ оценивается сверху величиной $2\big(3(1-\delta)\big)^{-1}$. Поэтому

$$\frac{|\lambda-\lambda_k|}{3\delta|\lambda_k|} \le 1, \lambda, \lambda_k \in B(w,\delta|w|), \delta \in (0,1/3). \tag{1}$$

Кроме того, очевидно, верно неравенство

$$\frac{|\lambda-\lambda_k|}{3\delta|\lambda_k|} \ge 1, \lambda \notin B(w,5\delta|w|), \lambda_k \in B(w,\delta|w|), \delta \in (0,1/3).$$

Введем еще функции ([1]):

$$q_\Lambda^k(z,\delta) = \prod_{\lambda_v \in B(\lambda_k,\delta|\lambda_k|), v\ne k} \left(\frac{z-\lambda_v}{3\delta|\lambda_v|}\right)^{n_v}, k \ge 1.$$

Если круг $B(\lambda_k,\delta|\lambda_k|)$ не содержит точек $\lambda_v, v \ne k$, то $q_\Lambda^k(z,\delta) \equiv 1$. В силу (1)

$$\left|q_\Lambda^k(z,\delta_1)\right| \ge \left|q_\Lambda^k(z,\delta_2)\right|, z \in B(\lambda_k,\delta_2|\lambda_k|), \tag{2}$$

если $0 < \delta_1 \leq \delta_2 < 1/3$. Определим индекс конденсации ([1]):

$$\mathcal{S}_\Lambda = \lim_{\delta\to 0} \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln\left|q_\Lambda^k(\lambda_k,\delta)\right|}{|\lambda_k|}.$$

Определение корректно, т.к. в силу (2) предел по δ существует. Отметим, что $\mathcal{S}_\Lambda \leq 0$. Это следует из неположительности величины $\ln\left|q_\Lambda^k(\lambda_k,\delta)\right|$ при $\delta \in (0,1/3)$. Индекс $\mathcal{S}_\Lambda$ играет важную роль при исследовании задач интерполяции и фундаментального принципа ([1]), а также при решении задачи о распределении особых точек суммы ряда экспоненциальных мономов, расположенных на границе его области сходимости ([2]). Различные свойства последовательности Λ, связанные с индексом $\mathcal{S}_\Lambda$, и примеры вычисления $\mathcal{S}_\Lambda$ имеются в работах [2] и [3]. Приведем еще некоторые результаты, касающиеся этого индекса.

Теорема 1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\mathcal{S}_\Lambda = 0$, и B – открытое множество, которое содержит все точки λ_k. Следующие утверждения эквивалентны:*

для каждого $\varepsilon > 0$ существуют числа $R > 0$ и $\delta \in (0,1/3)$ такие, что

$$\ln|q_\Lambda(z,w,\delta)| \geq -\varepsilon|z|, z \in \mathbb{C}\backslash B, |w| \geq R;$$

для каждого $\varepsilon > 0$ существуют числа $R > 0$ и $\delta \in (0,1/3)$такие, что

$$\ln|q_\Lambda(z,w,\delta)| \geq -\varepsilon|z|, z \in B(w,\delta|w|) \cap \partial B, |w| \geq R;$$

для каждого $\varepsilon > 0$ существуют номер k_0 и число $\delta \in (0,1/3)$ такие, что для любого $k \geq k_0$ верно неравенство

$$\ln\left|\frac{z-\lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right|^{n_k} \geq -\varepsilon|\lambda_k|, z \in B(\lambda_k,\delta|\lambda_k|) \cap \partial B;$$

для каждого $\varepsilon > 0$ существуют номер k_0 и число $\delta \in (0,1/3)$ такие, что для любого $k \geq k_0$ верно неравенство

$$\ln\left|\frac{z-\lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right|^{n_k} \geq -\varepsilon|z|, z \in \mathbb{C}\backslash B.$$

Теорема 2. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Предположим, что последовательность положительных чисел $\Gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяет условиям:*

$$\frac{n_k}{|\lambda_k|}\ln\frac{\gamma_k}{|\lambda_k|} \to 0, k \to \infty. \quad (3)$$

Тогда выполнено утверждение 3 из теоремы 1, где полагаем $B = B(\Lambda,\Gamma) = \bigcup_{k=1}^\infty B(\lambda_k,\gamma_k)$.

Замечания. 1. Предположим, что последовательность положительных чисел $\{\gamma_k\}$ удовлетворяет (3). Кроме того, для $r_k \in (0,1), k \geq 1$, выполнено соотношение

$$\frac{n_k}{|\lambda_k|}\ln r_k \to 0, k \to \infty. \quad (4)$$

Тогда, как нетрудно заметить последовательность $\{r_k\gamma_k\}$ также удовлетворяет (3). В частности, если $m(\Lambda) = 0$, то для любых $r_k \in (r_0,1), k \geq 1, r_0 > 0$, выполнено (4).

2. Пусть $m(\Lambda) = 0$ и $\gamma_k = n_k, k \geq 1$. Тогда $\Gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяет (3). Имеем:

$$\frac{n_k}{|\lambda_k|}\ln\frac{\gamma_k}{|\lambda_k|}=\frac{n_k}{|\lambda_k|}\ln\frac{n_k}{|\lambda_k|}\to 0, k\to\infty.$$

Покажем, что в условиях теоремы 1 множество B можно выбрать в виде объединения попарно не пересекающихся кругов $B(\lambda_k,\gamma_k), k\geq 1$. При этом ее утверждения будут выполнены.

Пусть $\Gamma=\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\Lambda=\{\lambda_k,n_k\}$. Для каждого $k\geq 1$ символом β_k обозначим минимальное расстояние от точки λ_k до точек $\lambda_s, s\neq k$. Положим

$$\Gamma_0(\tau)=\left\{\gamma_k^0(\tau)\right\}_{k=1}^{\infty}, \gamma_k^0(\tau)=\tau\min\{\gamma_k,\beta_k\}, \tau\in(0,2^{-1}], k\geq 1, \quad (5)$$

$$B\big(\Lambda,\Gamma_0(\tau)\big)=\bigcup_{k=1}^{\infty}B\left(\lambda_k,\gamma_k^0(\tau)\right).$$

В силу (5) и определения чисел β_k круги $B\left(\lambda_k,\gamma_k^0(\tau)\right)$ попарно не пересекаются.

Теорема 3. *Пусть* $\Lambda=\{\lambda_k,n_k\}, m(\Lambda)=0, \tau\in(0,2^{-1}]$, *и* $S_\Lambda=0$. *Предположим, что* $\Gamma=\{\gamma_k\}$ *удовлетворяет (3), и* $B=B\big(\Lambda,\Gamma_0(\tau)\big)$. *Тогда верно утверждение 3 из теоремы 1.*

Литература

1. А. С. Кривошеев Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях. Известия РАН. Серия математическая. 2004. Т.68. №2. С. 71–136.
2. О. А. Кривошеева. Особые точки суммы ряда экспоненциальных мономов на границе области сходимости. Алгебра и анализ. 2011. Т.23. №2. С. 162–205.
3. А. С. Кривошеев, О. А. Кривошеева. Базис в инвариантном подпространстве целых функций. Алгебра и анализ. 2015. Т.27. №2. С.132–195.

Статья рекомендована к печати факультетом математики и информационных технологий БашГУ (докт. физ.-мат. наук, проф. З. Ю. Фазуллин)

A representation of a solution of a homogenous convolution equation as the series of exponential monomials

O. A. Krivosheeva

Bashkir State University
32 Zaki Validi Street, 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

Email: kriolesya2006@yandex.ru

In the paper multiple sequences of different complex numbers and some of their characteristics are studied. In particular, the condensation index of such sequences are considered. This index plays an important role in the study of interpolation problems and the fundamental principle, as well as in solving the problem of distribution of singular points of the sum of a series of exponential monomials located at the boundary of its convergence domain. Estimates for special polynomials are obtained.

Keywords: a multiple sequence of complex numbers, condensation index.