Испарение пластины под действием потоков энергии переменной интенсивности

И. И. Латыпов*, Л. А. Бигаева, В. В. Чудинов

Башкирский государственный университет, Бирский филиал
Россия, Республика Башкортостан, 452453 г. Бирск, улица Интернациональная, 10.

**Email: latypovii@rambler.ru*

В докладе ставится и решается задача нахождения распределения температуры в пластине при нагреве и испарении под действием высокоинтенсивного потока энергии. Исходная краевая задача сводится к решению сингулярно возмущенной краевой задачи уравнения теплопроводности с нелинейными граничными условиями на подвижных границах. Приближенное решение получается в виде асимптотического разложения решения в смысле Пуанкаре по степеням малых параметров, в зависимости от близости рассматриваемой точки к границам.

Ключевые слова: испарение материала, уравнение теплопроводности, краевая задача, функция Грина, асимптотика решения.

Введение

Для современного уровня развития техники и технологии характерно использование мощных потоков энергии, например, в лазерной микрометаллургии – изменение структуры и состава поверхностного слоя металлических деталей; при обработке металлических зеркал; при термическом воздействии на пористые материалы и др. При этом развиваются такие процессы как нагрев, плавление и испарение, которые реализуются при воздействии тепловых потоков, мощность которых меняется со временем. Несмотря на значительные успехи применения численных методов при решении таких задач, применение аналитических способов исследования этих процессов остается актуальной [1–3].

Целью данной работы является аналитический расчет и численное моделирование процесса нагрева и последующего плавления твердого тела под действием теплового потока переменной интенсивности.

Постановка задачи

Физическая модель представляет собой пластину толщины L с начальной температурой T_0. Теплофизические характеристики материала считаются постоянными. На поверхность пластины ($\xi = 0$) падает тепловой поток переменной интенсивности. После достижения поверхности ($\xi = 0$) температуры плавления (T_m) начинается процесс плавления, при этом считается, что жидкая фаза удаляется тотчас же после образования. На поверхности поддерживается радиационно-конвективный теплообмен [1–2].

Математическая модель процесса нагрева и абляции пластины выписывается в виде одномерной краевой задачи уравнения теплопроводности с нелинейными граничными условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},\ \tau > 0,\ S(\tau) < \xi < L;\ u(\xi,\tau) = T_0,\ \tau = 0,$$

$$-\lambda \frac{\partial u}{\partial \xi} = q(\tau) - \alpha_1 \left[u(\xi,\tau) - u_1 \right] - \sigma_1 \left[u^4(\xi,\tau) - u_1^4 \right] - \gamma \cdot R(\xi,\tau),\ \xi = S(\tau),$$

$$-\lambda \frac{\partial u}{\partial \xi} = \alpha_2 \left[u(\xi,\tau) - u_2 \right] + \sigma_2 \left[u^4(\xi,\tau) - u_2^4 \right],\ \xi = L,$$

$$R(\xi,\tau) = \frac{v^*}{u^{1/2}(\xi,\tau)} \exp\left\{ -\frac{u^*}{u(\xi,\tau)} \right\},\quad R(\xi,\tau) = 0,\quad u(\xi,\tau) < T_m \quad ;\quad R(\xi,\tau) > 0,$$
$$u(\xi,\tau) = T_m,$$

где $q(\tau)$ - плотность теплового потока; параметры v^*, u^* определяются законом испарения Герца-Кнудсена; λ, a - коэффициенты тепло- и температуро-проводности; T_m - температура плавления материала; $S(\tau)$ – закон изменения фазовой границы; $\alpha_i, \sigma_i, u_i, T_0$ - постоянные, $i = 1,2$.

После введения безразмерных переменных $\xi = \overline{x} \cdot x$, $\tau = \overline{t} \cdot t$, и обозначений $u(\overline{x} \cdot x, \overline{t} \cdot t) = T(x,t)$, $u_0(\overline{x} \cdot x, 0) = T_0(x) = T_0$, получим сингулярно возмущенную краевую задачу уравнения теплопроводности с малым параметром Fo

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = Fo \cdot \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2},\ T(x,t) = T_0(x) = T_0,\quad t \to 0,$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = -\varphi(t) + \overline{\alpha}_1 \left[T(x,t) - u_1 \right] + \gamma_1 \cdot \left[T^4(x,t) - u_1^4 \right] + \gamma \cdot B(x,t),\quad x = \psi(t),$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = -\overline{\alpha}_2 \left[T(x,t) - u_2 \right] - \gamma_2 \cdot \left[T^4(x,t) - U_2^4 \right],\quad x = H,$$

$$\left(x,t\right)\in\Omega'=\left\{\left(x,t\right):\psi(t)<x<H,\,0<t\le\overline{t_0}\right\},\;Fo=\frac{a^2\overline{t}}{\overline{x}^2},\;\;0<Fo<<1;\quad H=\frac{L}{\overline{x}},$$

$$\overline{t_0}=\frac{t_0}{\overline{t}},\;\psi(t)=\frac{S\left(\overline{t}\cdot t\right)}{\overline{x}},\;\varphi(t)=\frac{\overline{x}}{\lambda}\cdot q(\overline{t}\cdot t),\;\overline{\alpha}_i=(-1)^{i+1}\frac{\overline{x}}{\lambda}\alpha_i,$$

$$\gamma_i=(-1)^{i+1}\frac{\overline{x}}{\lambda}\sigma_i,\;\;i=1,2;$$

$$\psi(t)=\begin{cases}0, & \text{если }\;T(x,t)<T_m,\\ S(\overline{t}\cdot t), & \text{если }\;T(x,t)\ge T_m,\end{cases}\quad B(x,t)=\begin{cases}0, & \text{если }\;T(x,t)<T_m,\\ \dfrac{\overline{x}}{\lambda}R(\overline{x}\cdot x,\overline{t}\cdot t), & \text{если }\;T(x,t)\ge T_m.\end{cases}$$

В работе ставится и решается задача приближенного аналитического решения данной краевой задачи, используя аппарат асимптотического анализа интегрального представления решения.

Записывается интегральное представление решения исходной сингулярно возмущенной краевой задачи с нелинейными граничными условиями на подвижных границах с помощью функции Грина.

Ищется асимптотическое разложение функции Грина в смысле Пуанкаре как решения соответствующей однородной краевой задачи [4–5]. Найденная асимптотика функции Грина подставляется в интегральное представление решения.

Приближенное решение искомой задачи, используя "*геометро-оптический*" асимптотический метод [6–7], ищется в виде асимптотических разложений по степеням малых параметров в смысле Пуанкаре.

При этом необходимо учитывать “*близость*” рассматриваемой точки (x,t) к границам области Ω', так как в зависимости от этого получаем асимптотические разложения по степеням малых параметров. В соответствии с введенным понятием “*близости*” точки к границе, область делится на “*пограничную*”, “*промежуточную*” и “*удаленную*” от границ зоны [7–8].

Решение краевой задачи

Выпишем интегральное представление решения краевой задачи

$$T(x,t)=T_0\int\limits_{\psi_1(0)}^{H}\Gamma\left(x,t;y,0\right)dy+Fo\cdot\int\limits_0^t\varphi\left(s\right)\cdot\Gamma\left(x,t;\psi(s),s\right)ds+$$

$$+Fo\cdot\overline{\alpha}_1\cdot u_1\int\limits_0^t\Gamma\left(x,t;\psi(s),s\right)ds-Fo\cdot\gamma_1\int\limits_0^t\nu_1(s)\Gamma\left(x,t;\psi(s),s\right)ds-$$

$$-Fo\cdot\bar{\alpha}_2\cdot u_2\int_0^t\Gamma\left(x,t;H,s\right)ds+Fo\cdot\gamma_2\int_0^t\nu_2(s)\Gamma\left(x,t;H,s\right)ds,$$

где $\Gamma(x,t;y,s)$ - функция Грина соответствующей однородной краевой задачи, для которой находится асимптотическое разложение по степеням малого параметра $Fo,\ 0<Fo<<1$ в зависимости от “*близости*” рассматриваемой точки (x,t) к границам области Ω'.

Подставив найденное асимптотического разложение функции Грина в интегральное представление решения и используя граничные условия, получим систему нелинейных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $\nu_1(t),\ \nu_2(t)$. Решая эту систему методом последовательных приближений, найдем асимптотики этих функций в виде

$$\nu_i(t)=\sum_{k=0}^{n}p_{ik}\left(t\right)\cdot\left(Fo\right)^k+O\left(\left(Fo\right)^{n+1}\right),\ Fo\to 0,\ i=1,2,$$

где коэффициенты $p_{ik}\left(t\right)$ вычисляются в явном виде.

Подставив в интегральное представление решения асимптотические разложения функций Грина $\Gamma(x,t;y,s)$ и $\nu_1(t),\ \nu_2(t)$, проведем асимптотический анализ полученных интегралов, учитывая “*близость*” рассматриваемой точки (x,t) к границам области.

В результате получим приближенное решение исходной задачи в виде асимптотических разложений в смысле Пуанкаре в зависимости от “*близости*” рассматриваемой точки к границам области Ω' [5–10].

В случае $T(x,t)<T_m$, верно утверждение.

Теорема. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной краевой задачи имеет следующий вид:

В “*пограничном слое*” границы $x=0$

$$T_{pg0}(x,t)=T_0+\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{\bar{N}}d_{kj}^{(0)}(x,t)\left(\frac{x}{2\sqrt{Fot}}\right)^j Fo^{\frac{k+1}{2}}+O\left(\left(\frac{x}{2\sqrt{Fot}}\right)^{\bar{N}+1}Fo^{\frac{N+2}{2}}\right),$$

$$Fo\to 0,$$

где выполняется условие $x=O\left(Fo^p\right),\ p>1/2$.

В “*промежуточном слое*” границы $x=0$

$$T_{pr0}(x,t)=T_0+\sum_{k=0}^{M} d_k^{(1)}(x,t)\cdot Fo^{\frac{k+1}{2}}+O\left(Fo^{\frac{M+2}{2}}\right),$$

при выполнении условия $x=O\left(2\sqrt{Fot}\right),\quad Fo\to 0$.

В “*области удаленных от границ* $x=0$, $x=H$ *точек*”, где выполняются условия (при $p<\frac{1}{2}$): $x=O\left(Fo^{p}\right)$, $H-x=O\left(Fo^{p}\right)$, $Fo\to 0$

$T_{ud}(x,t)\quad T_0$.

В “*промежуточном слое*” границы $x=H$

$$T_{prH}(x,t)=T_0+\sum_{k=0}^{M} d_k^{(2)}(x,t)\cdot Fo^{\frac{k+1}{2}}+O\left(Fo^{\frac{M+2}{2}}\right),$$

при выполнении условия $H-x=O\left(2\sqrt{Fot}\right)$, $Fo\to 0$.

В “*пограничном слое*” границы $x=H$

$$T_{pgH}(x,t)=T_0+\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{\bar N} d_{kj}^{(3)}(x,t)\left(\frac{H-x}{2\sqrt{Fot}}\right)^{j} Fo^{\frac{k+1}{2}}+O\left(\left(\frac{H-x}{2\sqrt{Fot}}\right)^{\bar N+1}\cdot Fo^{\frac{N+2}{2}}\right),$$

$Fo\to 0$,

при выполнении условия $H-x=O\left(Fo^{p}\right),\quad p>0{,}5$.

Замечание. Приближенное решение искомой задачи получается в виде асимптотических разложений в смысле Пуанкаре, то есть коэффициенты не содержат малых параметров, при этом коэффициенты разложений вычисляются в явном виде.

Заключение

Полученные результаты позволяют исследовать рассматриваемый процесс как на качественном, так и на количественном уровне; проводить параметрический анализ поставленной задачи; выявить влияние режимов облучения, радиационно-конвективной составляющей на распределение температуры в материале.

Литература

1. Алпатьев А. Н., Данилов А. А., Никольский Н. Ю. и др. Особенности тепловых и генерационных режимов оптически плотных активных сред. // Изд. АН СССР. Тр. Ин. Общ. Физ. 1990, Т.26. – С.107–124.
2. Прохоров А. М., Конов В. И., Урсу И., Михэилеску И. Н. Взаимодействие лазерного излучения с металлами. – М.: Наука, 1988.
3. Ткачев В. И., Чудинов В. В., Морозкин Н. Д. Расчет динамики термоупругих напряжений в керамическом клапане методом конечных элементов.// Вестник башкирского университета. Уфа. Т. 19. №1. 2014. – С.8–13.
4. Латыпов И. И. Асимптотическое разложение функции Грина сингулярно возмущенной краевой задачи уравнения теплопроводности с подвижными криволинейными границами // Вестник Бирск. гос.соц.-пед. академии: Науч.-метод. журнал, выпуск 6. – Бирск: Бирская гос. Соц.-пед.акад., 2005. – С.60–66.
5. Латыпов И. И. Исследование распределения температуры в материале при лазерной абляции. В книге: VIII Международная конференция по математическому моделированию. Якутск, 04–08 июля 2017 г. / Тезисы докладов. 2017. С. 99.
6. Латыпов И. И., Кравченко Е. Ф., Несененко Г. А. Применение интегральных уравнений к сингулярно возмущенной нестационарной краевой задаче теплопроводности с подвижными границами. //Дифференциальные уравнения. 1999. – т.35, №9. – С.1171–1178.
7. Латыпов И. И., Шакиров Р. А., Улитин Н. В. Приближенное решение задачи нахождения распределения температуры в активных элементах твердотельных лазеров. / Вестник Казанского технологического университета, 2014. Т.14. №5. – С.80–87.
8. Латыпов И. И. Моделирование испарения материала короткими лазерными импульсами. Труды четвертой Российской национальной конференции по теплообмену: В 8 томах. Т.5. – М.: Изд.дом МЭИ, 2006. – С.138–142.
9. Латыпов И. И. Исследование нестационарных тепловых процессов в активных элементах твердотельных лазеров //Третья Российская национальная конференция по теплообмену в восьми томах (РНКТ3).21–25 октября 2002 года. Москва. Том 7. – М.: Изд-во МЭИ, 2002. - Т.7. -С.171–174.
10. Latypov I. I. Approximate solution to a singular perturbed boundary value problem of thermal shielding // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 918 (2017) 012005

Plate evaporation under effect of variable intensity energy flows

I. I. Latypov*, L. A. Bigaeva, V. V. Chudinov

Bashkir State University, Birsk Branch
49 Internatsionalnaya Street, 452453 Birsk, Republic of Bashkortostan, Russia.

**Email: latypovii@rambler.ru*

The report poses and solves the problem of finding the temperature distribution in the plate during heating and evaporation under the action of a high-intensity energy flow. The initial boundary value problem is reduced to the solution of a singularly perturbed boundary value problem of the heat equation with nonlinear boundary conditions on moving boundaries. An approximate solution is obtained in the form of an asymptotic expansion of the solution in the Poincaré sense in powers of small parameters, depending on the proximity of the point in question to the boundaries.

Keywords: evaporation material, heat conduction equation, Green's function, boundary value problem, asymptotics of the solution.