Исследование устойчивости циклов дискретных динамических систем в случае слабого резонанса

С. А. Муртазина

Башкирский государственный университет, Сибайский институт (филиал)
Россия, Республика Башкортостан, 453833 г. Сибай, улица Белова, 21.

Email: sariamurtaz@mail.ru

В работе рассматривается вопрос об устойчивости циклов, возникающих в задаче о бифуркации точек равновесия дискретных динамических систем в случае слабого резонанса. Получены новые признаки устойчивости циклов и точек равновесия, определены характеристики, определяющие свойства устойчивости.

Ключевые слова: динамические системы, устойчивость, бифуркация, периодические решения, точки равновесия.

Рассматривается дискретная динамическая система, зависящая от двух параметров в нормальной форме ([1], [2])

$$\overline{X} = A(\alpha,\beta)[X + a_3(X,\alpha,\beta)],\ X \in R^2. \qquad (1)$$

Здесь $A(\alpha,\beta) = (1+\alpha)\begin{pmatrix} cos2\pi(\theta_0+\beta) & -sin2\pi(\theta_0+\beta) \\ sin2\pi(\theta_0+\beta) & cos2\pi(\theta_0+\beta) \end{pmatrix}$, где $\theta_0 = \frac{p}{q}$ – несократимая дробь и $0 \le \theta_0 \le 1/2$, нелинейность $a_3(X,\alpha,\beta)$имеет вид

$$a_3(X,\alpha,\beta) = (x^2+y^2)\begin{pmatrix} K_1x - K_2y \\ K_2x + K_1y \end{pmatrix},$$

$$X = (x,y)^T.$$

Для системы (1) значение $(\alpha_0,\beta_0) = (0.0)$ является точкой бифуркации q-циклов в соответствии со следующим определением [2].

Значение (α_0,β_0) называется точкой бифуркации q-циклов системы (1), если существуют последовательности $\alpha_k \to \alpha_0$, $\beta_k \to \beta_0$ такие, что при каждом $\alpha = \alpha_k, \beta = \beta_k$ система (1) имеет ненулевой q-цикл $X_k^* = \{X_0^k, X_1^k, X_2^k, \dots, X_{q-1}^k\}$, причем $\max\limits_{0\le i\le q-1}\|X_i^k\| \to 0$.

Известно [3], что тогда на плоскости параметров(α,β)существует область клювообразной формы (язык Арнольда), вершина которой лежит в точке $(\alpha_0,\beta_0) = (0.0)$ (в этой точке матрица $A(\alpha,\beta)$имеет собственные значения $e^{2\pi\theta_0 i}$с рациональным θ_0). Язык Арнольда представляет множество тех значений параметров (α,β), при которых система (1) имеет q-циклы, амплитуды которых стремятся к нулю при стремлении (α,β) к $(\alpha_0,\beta_0) = (0.0)$. Языки Арнольда при $1 \le q \le 4$ (сильный резонанс) являются достаточно широкими, а при $q \ge 5$ (слабый резонанс) эти множества черезвычайно узкие: фактически вырождаются в кривую.

В настоящей работе рассматривается вопрос об устойчивости возникающих при бифуркации q-циклов и порождающей их нулевой неподвижной точки системы (1) в случае слабого резонанса. Приводятся критерии устойчивости этих решений.

Приведем утверждение, доказанное в работе [2].

Точки q-циклов системы (1) являются неподвижными точками дискретной динамической системы

$\overline{X} = B(\alpha,\beta)[X + b_3(X,\alpha,\beta)],\ X \in R^2,$ (2)

где

$$B(\alpha,\beta) = A^q(\alpha,\beta), b_3(X,\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{q} A^{q-i}(\alpha,\beta)a_3(A^{i-1}X,\alpha,\beta).$$

Положим $\tilde{b}_3(X,\alpha,\beta) = B(\alpha,\beta)b_3(X,\alpha,\beta)$. Пусть e и g – произвольные единичные ортогональные векторы.

Определим числа

$\alpha_2 = -\frac{1}{q}(\tilde{b}_3, e),\ \beta_2 = -\frac{1}{2\pi q}(\tilde{b}_3, g),$ (3)

где $\tilde{b}_3 = \tilde{b}_3(e,\alpha_0,\beta_0)$. Эти числа не зависят от выбора векторов e и g.

Теорема 1. Пусть $q \geq 5$. Тогда существуют непрерывные функции $\alpha(\varepsilon) = \varepsilon^2\alpha_2 + o(\varepsilon^2)$, $\beta(\varepsilon) = \varepsilon^2\beta_2 + o(\varepsilon^2)$, $X(\varepsilon) = \varepsilon e + o(\varepsilon)$ такие, что система (1) при $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, $\beta = \beta(\varepsilon)$ имеет q-цикл с начальной точкой $X_0 = X(\varepsilon)$.

Приведем, критерий устойчивости возникающих q-циклов со стартовой точкой $X(\varepsilon)$ системы (1). Верна

Теорема 2. При всех малых значениях $\varepsilon > 0$q-цикл со стартовой точкой $X(\varepsilon)$ системы (1) устойчив, если $\alpha_2 > 0$ и неустойчив, если $\alpha_2 < 0$.

Устойчивость нулевой неподвижной точки системы (1) можно определить из следующей теоремы.

Теорема 3. При всех малых значениях $\varepsilon > 0$ нулевая неподвижная точка системы (1) при $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, $\beta = \beta(\varepsilon)$ асимптотически устойчива, если $\alpha_2 < 0$ и неустойчива, если $\alpha_2 > 0$.

Из теорем 2 и 3, а также из того факта, что бифуркационные q-циклы системы (1) не могут быть асимптотически устойчивыми, получим следствия: если нулевая неподвижная точка системы (1) при $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, $\beta = \beta(\varepsilon)$ асимптотически устойчива, то возникающий q-цикл со стартовой точкой $X(\varepsilon)$ неустойчив; если этот цикл является устойчивым, то неподвижная точка $X = 0$ неустойчива.

Приведем доказательства теорем 2 и 3.

Доказательство теоремы 2. Следующее вспомогательное утверждение доказывается проведением несложных преобразований.

Лемма 1. Для любого натурального числа kверно соотношение

$a_3\left(A^k X,\alpha,\beta\right) = (1+\alpha)^{2k} A^k a_3(X,\alpha,\beta).$

С учетом данной леммы число α_2 примет вид

$\alpha_2 = -(K_1 cos2\pi\theta_0 + K_2 sin2\pi\theta_0),$ (4)

а $b_3(X,\alpha,\beta)$ –

$b_3(X,\alpha,\beta) = SA^{q-1} a_3(X,\alpha,\beta),$ (5)

где $S = 1 + (1+\alpha)^2 + (1+\alpha)^4 + \cdots + (1+\alpha)^{2(q-2)} + (1+\alpha)^{2(q-1)}$.

При всех малых εсвойства устойчивости q-циклов системы (1), стартующих из точки $X(\varepsilon)$, и неподвижных точек $X(\varepsilon)$ системы (2) одинаковы [4]. Поэтому достаточно получить критерий устойчивости неподвижной точки $X(\varepsilon)$ системы (2). Для простоты вычислений перейдем к комплексной форме в уравнении (2) заменой $z = x + iy$. Тогда уравнение (2) примет вид:

$\overline{z} = (1+\alpha)^q e^{2\pi q(\theta_0+\beta)i}\left(z + S(1+\alpha)^{q-1} e^{2\pi(q-1)(\theta_0+\beta)i} K|z|^2 z\right).$ (6)

Пусть $e = (1.0)^{\mathrm{T}}$. Тогда неподвижная точка $X(\varepsilon)$ в комплексной форме примет вид$z(\varepsilon) = x(\varepsilon) + iy(\varepsilon)$, где $x(\varepsilon) = \varepsilon + o(\varepsilon)$, $y(\varepsilon) = o(\varepsilon)$.

Обозначим через$F(z,\alpha,\beta)$правую часть системы (6). Критерием устойчивости неподвижной точки $z(\varepsilon)$ будет условие $\left|[F(z,\alpha(\varepsilon),\beta(\varepsilon)]'_{z=z(\varepsilon)}\right| < 1$. С учетом формул для $\alpha(\varepsilon)$, $\beta(\varepsilon)$, $z(\varepsilon)$, а также формулы (5) последнее условие примет вид $|1 - 2q\alpha_2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)| < 1$. Отсюда следует справедливость теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. Критерием асимптотической устойчивости нулевой неподвижной точки $z = 0$ системы (6), что равносильно асимптотической устойчивости нулевой неподвижной точки $X = 0$ системы (2), является соотношение $|[F(z,\alpha(\varepsilon),\beta(\varepsilon)]'_{z=0}| < 1$. С учетом формул $\alpha(\varepsilon)$, $\beta(\varepsilon)$, а также формулы (4) последнее условие примет вид $|1 + q\alpha_2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)| < 1$. Таким образом, нулевая неподвижная точка асимптотически устойчива, если $\alpha_2 < 0$, и неустойчива, если $\alpha_2 > 0$. Теорема доказана.

Литература

1. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 2. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2009. С.
2. Юмагулов М. Г. Локализация языков Арнольда дискретных динамических систем. // Уфимский математический журнал. 2013. Т.5, №2. С. 109–130.

3. Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000. С.

4. Вышинский А. А., Ибрагимова Л. С., Муртазина С. А., Юмагулов М. Г. Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах. // Уфимский математический журнал, 2010. Т.2. №4. С. 3–26.

Статья рекомендована к печати кафедрой дифференциальных уравнений БашГУ
(д. ф.-м.н., проф. М. Г. Юмагулов)

The study of the stability of cycles of discrete dynamical systems in the case of weak resonance

S. A. Murtazina

Bashkir State University, Sibay Branch (Institute)
21 Belova Street, 453833 Sibay, Republic of Bashkortostan, Russia.

Email: sariamurtaz@mail.ru

This article examines the question of the stability of cycles that occur in the problem on bifurcation points of equilibria of discrete dynamical systems in the case of a weak resonance. Obtained new signs of stability cycles and equilibrium point, defined the characteristics that determine the properties of stability.

Keywords: dynamic systems, stability, bifurcation, periodic solution, equilibrium points.