О спектральной асимптотике несамосопряженного оператора Штурма – Лиувилля с медленно растущим потенциалом

Л. Г. Валиуллина, Х. К. Ишкин*

Башкирский государственный университет

Россия, Республика Башкортостан, г. Уфа, 450076, ул. Заки Валиди, 32.

**Email: ishkin62@mail.ru*

В работе предложен новый подход, позволяющий получить достаточно широкие условия на возмущения, сохраняющие асимптотику спектра несамосопряженных дифференциальных операторов. Подход основан на модификации известного метода Келдыша исследования условий локализации спектра относительно компактных возмущений самосопряженных операторов с резольвентой класса Неймана-Шаттэна. Получены условия на возмущение V, при которых сохраняется асимптотика спектра оператора $-y'' + e^{i\theta}\ln x\, y$.

Ключевые слова: *несамосопряженные операторы, теорема Келдыша, спектральная устойчивость, локализация* спектра.

Пусть T_0 – замкнутый оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Будем говорить, что **спектр оператора T_0 локализован около луча** $arg\,\lambda = \theta$, если для любого $\varepsilon > 0$ оператор T_0 вне угла $\{|arg\,\lambda - \theta| < \varepsilon\}$ имеет конечное число собственных значений, каждое из которых конечной кратности. Из теоремы Келдыша [1] следует, что если

а) оператор T_0 положителен и $T_0^{-1} \in \mathfrak{S}_p$ при некотором $p < \infty$, то любое возмущение V, компактное относительно T_0 (то есть $VT_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$), сохраняет локализацию спектра (около луча $arg\,\lambda = 0$). При выполнении дополнительного условия

б) $N(T_0, r) \sim f(r), r \to +\infty$, где $N(T_0, r)$ – число собственных значений оператора T_0 в круге $|\lambda| < r$, функция f определена и монотонна на $[R, +\infty), R > 0$, и при некотором $\gamma > 0$

$$\frac{f(s)}{f(r)} < \left(\frac{s}{r}\right)^\gamma \quad \forall s > r \geq R,$$

справедлива формула

$N(T, r) \sim N(T_0, r), r \to +\infty.$ (1)

Таким образом, каждый самосопряженный оператор T_0, удовлетворяющий условиям а) – б), образует семейство операторов $\{T\}$, близких к нему (то есть представимых в виде $T = T_0 + V, VT_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$), спектр которых имеет такую же асимптотику, что и спектр T_0.

Предположим теперь, что T не является близким к самосопряженному. Как показывают многочисленные примеры [2], такие операторы, как правило спектрально неустойчивы: спектр может сильно меняться под действием малых возмущений. Ясно, что для таких операторов теорема Келдыша не работает, для исследования их спектральных свойств приходится придумывать специальные методы.

Рассмотрим оператор

$D(T_0) = \{y \in L^2(0,+\infty): y' \in AC[0,+\infty), -y'' + e^{i\theta}q(x)y \in L^2(0,+\infty), y(0) = 0\}$, (2)

$T_0 y = -y'' + e^{i\theta}q(x)y$, (3)

где $0 \le \theta < \pi$, функция q локально суммируема на $[0,+\infty)$ и

$\lim\limits_{x\to+\infty} q(x) = +\infty$. (4)

Тогда оператор T_0 имеет дискретный спектр [3]. Не ограничивая общности, можно считать, что точка $\lambda = 0$ принадлежит резольвентному множеству оператора T_0. Если функция q на бесконечности растет медленнее любой степени, то T_0^{-1} не принадлежит $\mathfrak{S}_p$ ни при каком $p > 0$, то есть для T_0 не выполняются ни одно из условий а) и б) теоремы Келдыша. Как известно [4.5], при $q(x) = x^\alpha, \alpha > 0$, собственные числа T_0 простые, лежат на луче $arg\,\lambda = 2\theta/(2+\alpha)$ и имеют асимптотику:

$\lambda_n \sim C_0 \cdot e^{2\theta i/(2+\alpha)} n^{2\alpha/(2+\alpha)}, n \to \infty$, (5)

где C_0 – положительная постоянная. Аналогичная картина имеет место и при $q(x) = ln\,x$: λ_n простые, лежат на луче $\left\{\lambda = \left(t - \frac{i\theta}{2}\right)e^{i\theta}, t > 0\right\}$ и при $n \to +\infty$

$$\lambda_n \sim e^{i\theta}\, ln\, n\, , n \to \infty.$$

В связи со сказанным возникают следующие вопросы:

- при каких условиях на функцию q спектр оператора T_0 локализован около некоторого луча $arg\,\lambda = \alpha_0$ в следующем смысле: $\forall\, \varepsilon > 0$ спектр оператора T_0 вне угла $\{|arg\,\lambda - \alpha_0| < \varepsilon\}$ конечен;
- при каких возмущениях V спектр оператора $T = T_0 + V$ также локализуется около луча $arg\,\lambda = \alpha_0$ и справедлива формула *(1)*?

Вопросы (i) и (ii) достаточно подробно были изучены в работе [4]. Методика этой работы в существенном опиралась на полученный там же результат абстрактного характера, представляющий собой некий аналог теоремы Келдыша для произвольных замкнутых, не обязательно самосопряженных (даже не близких к самосопряженным в указанном выше смысле), операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве и имеющих резольвенту класса Неймана-Шаттэна $\mathfrak{S}_p$ при некотором $p > 0$. В настоящей работе мы не предполагаем выполнение последнего условия, поэтому метод работы [4] неприменим в рассматриваемой ситуации. Основные результаты содержатся в теоремах 2.1–2.3.

Теорема 2.1. Пусть существует функция $\tilde{q}$, аналитичная в угле $U = \{z: -\theta/2 < arg\, z < 0\}$, обладающая следующими свойствами:

1) в каждой конечной точке границы U существует конечный предел, такой, что $\tilde{q}(x) = q(x)$ при $x \geq 0$;
2) существуют положительные постоянные a_1, a_2, σ, такие, что при каждом $\alpha \in [-\theta/2; 0]$ и $r > 0$

   (а) $a_1 q(r) \leq \left|\tilde{q}\left(re^{i\alpha}\right)\right| \leq a_2 q(r)$,

   (б) $\left|arg(\tilde{q}\left(re^{i\alpha}\right)\right) + \theta/2 + 2\alpha| \leq \pi/2 - \sigma$;
3) для функции $\tilde{q}(re^{i\theta/2}), r > 0$, справедливо представление

   $\tilde{q}\left(re^{i\theta/2}\right) = p(r) + R(r), r \to +\infty$,

   где функция p вещественна, локально суммируема на $[0, +\infty)$ и

   $p(r) \to +\infty, R(r) = o\left(p(r)\right), r \to +\infty$. (6)

Тогда спектр оператора T_0 локализуется около луча $arg\, \lambda = \theta$.

Следствие. Пусть L_0 – оператор, порожденный в $L^2(0, +\infty)$ дифференциальным выражением $-y'' + py$ и краевым условием $y(0) = 0, L = L_0 + R$, где R – оператор умножения на функцию $R(\cdot)$. Обозначим через $\{s_k\}_1^\infty$ и $\{v_k\}_1^\infty$ пронумерованные в порядке возрастания модулей собственные числа операторов L_0 и L соответственно. Тогда если дополнительно к условиям 1) – 3)

$v_k \sim s_k, k \to +\infty$, *(7)*

то собственные значения оператора T_0 имеют асимптотику

$\lambda_k \sim e^{i\theta} s_k, k \to \infty$. *(8)*

Легко проверить, что функция $q(x) = \underbrace{ln \dots ln}_{n}(x + c)$, *где* $c > \underbrace{exp \dots exp}_{n-2} 1$, *удовлетворяет всем условиям теоремы.*

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия 1) – 3) теоремы 2.1 и пусть V – оператор умножения на функцию $V(z)$, которая

аналитична в угле $U = \{z: -\theta/2 < arg\, z < 0\}$ и имеет непрерывное продолжение в любой конечной точке границы U,

$V\left(re^{i\alpha}\right) = o\left(\tilde{q}\left(re^{i\alpha}\right)\right), r \to +\infty$, равномерно по $\alpha \in [-\theta/2, 0]$.

Тогда оператор $T = T_0 + V$ имеет дискретный спектр, локализованный около луча $arg\, \lambda = \theta$. При выполнении дополнительного требования

$N(L + W, r) \sim N(L, r), r \to +\infty$, *(9)* где W – оператор умножения на функцию $W(r) = e^{-i\theta}V(re^{-i\theta/2})$, имеет место формула *(1)*.

Теоремы 2.1 и 2.2 доставляют только достаточные условия локализации спектра операторов T_0 и T соответственно, потому лишь частично решают вопросы (i) и (ii). Вопрос о необходимости этих условий[1] намного сложнее. В связи с этим отметим работу [6], в которой получено необходимое и достаточное условие локализации спектра оператора Штурма-Лиувилля на кривой.

Теорема 2.1 вопрос об асимптотике несамосопряженного оператора T_0 сводит к вопросу об асимптотике спектра самосопряженного оператора L_0 с вещественным потенциалом p. Если для каких-то целей (например, для вычисления регуляризованного следа или для получения разложений по собственным векторам L_0) требуются точные асимптотические разложения для собственных чисел оператора L_0, то интерес представляют условия на потенциал (медленно растущий – для степенных этот вопрос изучен достаточно полно [7]), при которых эти разложения возможны.

На вещественный потенциал p наложим следующие условия:

1P) при некотором $x_0 > 0$ функция p суммируема на $(0, x_0)$;

2P) на $[x_0, +\infty)$ функция p дважды дифференцируема, p'' абсолютно непрерывна и

(a) $\left|\frac{p^{(k)}(x)}{p^{(k-1)}(x)}\right| \le c_k x^{-1}, c_k = const > 0, k = \overline{1.3}$,

(b) $\frac{p'(x)}{p(x)} > \alpha(\prod_{k=0}^{m} L_k(x))^{-1}$, где $L_0(x) = x, L_k(x) = L_{k-1}(x), \alpha = const > 0$.

Замечание 1. Из условия 2(b) следует, что на $[x_0, \infty)$ p возрастает и, поскольку

$$p(x) = p(x_0)\, exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{p'}{p} dt\right), \ \int_{x_0}^{x} \left(\prod_{k=0}^{m} L_k(t)\right)^{-1} dt = ln\left(\frac{L_m(x)}{L_m(x_0)}\right),$$

то $p(x) > C\big(L_m(x)\big)^{\alpha}$, где $C = const > 0$. Поэтому спектр оператора L дискретен.

Поскольку на $[x_0, \infty)$ функция p возрастает, то при каждом достаточно большом $s > 0$ уравнение $p(x) = s$ имеет единственное решение $\alpha(s)$, которое называют точкой поворота.

Теорема 2.3. Пусть $\{s_k\}_1^{\infty}$ – собственные значения оператора L_0, пронумерованные в порядке возрастания. Далее пусть выполнены условия

3P) $p'' \ge 0$ или $p'' \le 0$ при $x > x_0$ и для любых $0 < \delta < 1$ и $\varepsilon > 0$

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{a(\delta s)}{s(ln\, a(s))^{1/2+\varepsilon}} = +\infty.$$

---

[1] Требование аналитичности функции V выглядит излишне жестким по сравнению с самосопряженным случаем $\theta = 0$, когда для выполнения (9) достаточно лишь условие 2V) при $\alpha = 0$.

Тогда s_k при больших k удовлетворяют уравнению

$$\int_0^{a_{s_k}} \sqrt{s_k - p}dt = \pi\left(k + k_0 - \frac{1}{4}\right) + O\left(s_k^{-3/2}\right),$$

где k_0 – некоторое натуральное число.

Следствие. Если $p = ln(x+m),\ m > 0$, то

$$s_k = ln\left(2\sqrt{\pi}k\right) + k^{-1}\left(\frac{m}{n}(ln\,k)^{1/2} + k_0 - \frac{1}{4} + c_0(ln\,k)^{-1/2}\right) + r_k,$$

где $c_0 = \frac{m}{2pi}\left(1 + ln\left(\frac{2\sqrt{\pi}}{m}\right)\right), r_k = O\left(k^{-1}(ln\,k)^{-3/2}\right), k \to \infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (грант №01201456408) и РФФИ (грант №15–01–01095).

Литература

1. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // ДАН СССР. Т.77. №1. 1951. С.11–14.
2. Trefethen L. N. Pseudospectra of linear operators // SIAM Review. V.39. 1997. P.383--406.
3. Лидский В. Б. Несамосопряженный оператор типа Штурма-Лиувилля с дискретным спектром // Тр. ММО. Т.9. 1960. С. 45–79.
4. Ишкин Х. К. О спектральной неустойчивости оператора Штурма-Лиувилля с комплексным потенциалом // Дифференциальные уравнения. Т.45. №4. 2009. С. 480–495.
5. Лидский В. Б. Условия полноты системы корневых подпространств у несамосопряженных операторов с дискретным спектром // Тр. ММО. Т.8. 1959. С. 83–120.
6. Ишкин Х. К. Критерий локализации спектра оператора Штурма-Лиувилля на кривой// Алг. и анализ. Т.28, №1. 2016. С.52–88.
7. Ишкин Х. К. Асимптотика спектра и регуляризованный след сингулярных дифференциальных операторов высшего порядка // Дифференциальные уравнения. Т.31, №10. 1995. С.480–490.

Статья рекомендована к печати кафедрой математического анализа БашГУ
(докт. физ. мат. наук, проф. Х. К. Ишкин)

On spectral asymptotics of nonselfadjoint Sturm-Liouville operator with a slowly growing potential

L. G. Valiullina, Kh. K. Ishkin*

Bashkir State University
32 Zaki Validi st., 450074 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

**Email*: *ishkin62@mail.ru*

The paper proposes a new approach that allows to study the problem of spectral asymptotics of nonselfadjoint differential operators. The approach is based on a modification of the method of M. Keldysh for the study of the conditions of spectral localization of relatively compact perturbations of selfadjoint operators with resolvent of a class of Neumann-Schatten. The conditions on the perturbation$V$, which preserve the asymptotic behavior of the spectrum of the operator $-y'' + e^{i\theta} \ln x\, y$ have been obtained.

Keywords: nonselfadjoint operators, Keldysh theorem, spectral instability, spectral localization.