О знакоопределенности косо-характеристических полиномов

Р. А. Шарипов

Башкирский государственный университет
Россия, Республика Башкортостан, г. Уфа, 450076, ул. Заки Валиди, 32.

Email: r-sharipov@mail.ru

Обсуждается результат, состоящий в доказательстве знакоопределенности косо-характеристических полиномов для знакоопределенных квадратичных форм и формулируется проблема об их сводимости к суммам квадратов полиномов.

Ключевые слова: квадратичная форма, косо-характеристический полином.

Более ста лет назад в 1900-ом году на 2-ом Международном конгрессе математиков в Париже Давид Гильберт представил математической общественности список из 23 проблем. Они оказали существенное влияние на развитие математики в XX-ом веке. 17-ая проблема – это одна из 23-х проблем Гильберта.

17-ая проблема Гильберта. Пусть дана рациональная функция от n переменных с вещественными коэффициентами, которая во всех вещественных точках, где она определена, принимает неотрицательные значения. Можно ли представить ее в виде суммы квадратов рациональных функций, все коэффициенты которых вещественны?

17-ая проблема Гильберта относится к числу решенных. Ее решение было дано Эмилем Артином (Emil Artin) в 1927-ом году в работе [1]. Ответ на поставленный вопрос был положительным, но доказательство существования требуемого представления в виде суммы квадратов было неконструктивным. Конструктивное решение проблемы в виде алгоритма было найдено Чарльзом Дельзеллом (Charles Delzell) много позже в 1984-ом году в работе [2].

17-ую проблему Гильберта можно переформулировать, заменив рациональные функции полиномами.

Проблема разложения положительных полиномов. Пусть дан полином от n переменных с вещественными коэффициентами, который во всех вещественных точках принимает неотрицательные значения. Можно ли представить его в виде суммы квадратов полиномов, все коэффициенты которых вещественны?

Эта проблема также решена. Отрицательное решение этой проблемы дал сам Гильберт в работе 1888 года [3]. В этой работе Гильберт доказал существование полинома 6-ой степени, от двух переменных, который неотрицателен, но не представляется в виде суммы квадратов. Но доказательство Гильберта опять было неконструктивным. Первый конструктивный пример такого полинома был получен Моцкиным (Theodore

Samuel Motzkin) лишь в 1967-ом году в работе [4]. Пример Моцкина дается следующей формулой:

$$P(x,y)=x^4y^2+x^2y^4+1-3x^2y^2.$$

Полиномы, представимые в виде суммы квадратов, получили название SOS-полиномов (sum of squares). Результат Гильберта и пример Моцкина показывают, что не все неотрицательные полиномы являются SOS-полиномами.

Несмотря на то, что 17-ая проблема Гильберта и ее модифицированный вариант являются решенными, определенный интерес к неотрицательным (знакоопределенным) полиномам подпитывается их применением в задачах нелинейной оптимизации при построении алгоритмов управления. В качестве примера можно указать работы [5] и [6].

С появлением компьютеров в данном контексте возникают различные алгоритмические проблемы, а именно нахождение алгоритмов для выяснения неотрицательности полинома, и алгоритмов разложения в суммы квадратов. В [5] и [6] заявляется, что задача выяснения неотрицательности полинома является алгоритмически NP-сложной. В связи со сказанным любые наблюдения, связанные со знакоопределенными и полуопределенными полиномами могут оказаться ценными. Одно из таких наблюдений обсуждается в данной работе.

Пусть дана квадратичная форма от n переменных:

$$a(x^1,\ldots,x^n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x^ix^j. \quad (1)$$

Использование нижних и верхних индексов в (1) мотивировано Эйнштейновской тензорной нотацией. С формой (1) связана симметричная матрица

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}. \quad (2)$$

Пусть Λ – кососимметричная матрица того же размера, что и матрица A в (2):

$$\Lambda=\begin{Vmatrix} 0 & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda_{1n} & \cdots & 0 \end{Vmatrix}. \quad (3)$$

Используя матрицы (1) и (2), мы задаем полином

$$P(\lambda_{12},\ldots,\lambda_{n-1\,n})=P(\Lambda)=\det(A-\Lambda). \quad (4)$$

Компоненты матрицы (3) служат переменными полинома (4). Полином (4) был рассмотрен в моей работе [7], где он был назван косо-характеристическим полиномом в силу само-собой напрашивающейся аналогии с характеристическим полиномом квадратной матрицы.

Теорема 1. Квадратичная форма (1) с матрицей (2) знакоопределена тогда и только тогда, когда ее косохарактеристический полином (4) принимает значения одного знака.

Доказательство теоремы 1 содержится в моей работе [7]. Ее можно применять в обе стороны – как критерий знакоопределенности формы взамен критерия Сильвестра или как средство генерации знакоопределенных полиномов по знакоопределенным квадратичным формам.

В размерностях n=2 и n=3 косохарактеристический полином единичной матрицы A=1 вычисляется явно:

$$P(\Lambda)=1+(\lambda_{12})^2,\ \ P(\Lambda)=1+(\lambda_{12})^2+(\lambda_{13})^2+(\lambda_{23})^2.$$

В этих случаях он представляет собой сумму квадратов. При n=4 он тоже является суммой квадратов (см. [7]). Ответ на вопрос, будет ли косохарактеристический полином единичной матрицы A=1 суммой квадратов при всех n, мне не известен. Предполагаю, что этот вопрос можно включить в список нерешенных математических задач.

Работа докладывалась на Международной конференции «Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ» в октябре 2015 года. Автор выражает благодарность участникам этой конференции за внимание и плодотворные обсуждения.

Литература

1. Artin E. Über die Zerlegung definiter Funktionen Quadrate // Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg. 1927. V. 5. P. 111–115.

2. Delzell Ch. N. A continuous constructive solution to Hilbert’s 17th problem // Inventiones Mathematicae. 1984 . V. 76. P. 365–384.

3. Hilbert D. Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formen-quadraten // Mathematische Annalen. 1888. V. 32. P 342–350.

4. Motzkin T. S. The arithmetic-geometric inequality // Proc. of Symp. on Inequalities, O. Shisha, ed.. Academic Press, New York. 1967. P. 205–224.

5. Papachristodoulou A., Peet M. M., Lall S. Analysis of polynomial time delay systems using the sum of squares decomposition // Publication of American Control Conference. 2004. V. 5. P. 4153–4158.

6. De Oliveira M. Decomposition of a polynomial as a sum-of-squares of polynomials and the S-procedure // Publication of 44th IEEE Conference on Decision and Control. 2005. P. 1654–1659.

7. Sharipov R. A. On some higher degree sign-defnite multivariate polynomials associated with defnite quadratic forms // e-print arXiv:1507.05056 in Cornell University archive.

Статья рекомендована к печати кафедрой высшей алгебры и геометрии БашГУ (докт. физ.-мат. наук, проф. Б. Н. Хабибуллин)

On sign-definiteness of skew-characteristic polynomials

R. A. Sharipov

Bashkir State University
32 Zaki Validi st., 450074 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

Email: r-sharipov@mail.ru

A result is discussed consisting in the proof of the sign-definiteness of skew-characteristic polynomials for sign-definite quadratic forms and the problem on their reducibility to polynomial sums of squares is formulated.

Keywords: quadratic forms, skew-characteristic polynomials.