Построение специальных целых функций экспоненциального типа

О. А. Кривошеева

Башкирский государственный университет
Россия, Республика Башкортостан, г. Уфа, 450076, ул. Заки Валиди, 32.

Email: kriolesya2006@yandex.ru

Работа посвящена построению целых функций экспоненциального типа, которые обращаются в ноль на почти вещественной последовательности и имеют рост, близкий к регулярному.

Ключевые слова: инвариантное подпространство, почти вещественная последовательность, целая функция экспоненциального типа.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k. Считаем, что $|\lambda_{k+1}| \geq |\lambda_k|$ и $|\lambda_k| \to \infty$ при $k \to \infty$. Последовательность Λ будем называть почти вещественной, если $\mathrm{Re}\lambda_k > 0$ и $\mathrm{Im}\lambda_k/\mathrm{Re}\lambda_k \to 0$, когда $k \to \infty$.

Пусть W – нетривиальное замкнутое подпространство в пространстве $H(D)$ функций аналитических в выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ (с топологией равномерной сходимости на компактах из D), инвариантное относительно оператора дифференцирования. $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ – кратный спектр этого оператора в W и $\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}$ – семейство его собственных и присоединенных функций в W.

Частными случаями инвариантных подпространств являются пространства решений линейных однородных дифференциальных, разностных и дифференциально-разностных уравнений с постоянными коэффициентами как конечного так и бесконечного порядков, а также более общих уравнений свертки и их систем.

Работа посвящена построению специального семейства целых функций экспоненциального типа с почти вещественной последовательностью нулей (теоремы 1, 3, 4). На этой основе при помощи интерполирующей функции А. Ф. Леонтьева можно получить результаты о представлении функций из инвариантных подпространств с почти вещественным спектром в полуплоскостях с вертикальной границей (лежащих левее границы).

Пусть $B(z,r), S(z,r)$ – открытый круг и окружность с центром в точке z и радиуса r. Через $n(z,r,\Lambda)$ обозначим число точек λ_k (с учетом их кратностей n_k), попавших в замкнутый круг $\overline{B(z,r)}$, а через $\overline{n}(\Lambda)$ – верхнюю плотность последовательности Λ:

$$\overline{n}(\Lambda) = \overline{\lim_{r\to+\infty}}\, n(0,r,\Lambda)/r.$$

Пусть f – целая функция. Говорят, что f имеет экспоненциальный тип, если для некоторых $A, B \geq 0$ выполнено неравенство $\ln|f(\lambda)| \leq A + B|\lambda|, \lambda \in \mathbb{C}$. Индикатором f называется функция

$$h_f(\lambda) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \ln|f(t\lambda)|/t\, , \lambda \in \mathbb{C}\, .$$

Она является выпуклой и положительно однородной порядка один, т.к. совпадает с опорной функцией некоторого выпуклого компакта, называемого индикаторной диаграммой f (см., напр., [1], гл. I, §5, теорема 5.4).

Пусть $\delta \in (0.1)$. Положим $\Gamma(\delta) = \{t\lambda: \lambda \in B(1,\delta), t \in \mathbb{R}\}$. Доказательство следующего результата опирается на доказательства теоремы B из работы [2] и леммы 9 из [3].

Теорема 1. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– почти вещественная последовательность такая, что* $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$. *Тогда для любых* $\varepsilon > 0, \delta \in (0.1)$ *существуют* $\gamma \in (0.1)$, *целая функция экспоненциального типа* f *и строго возрастающая последовательность положительных чисел* $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ *такие, что* $t_{i+1} \leq (1+\delta)t_i, i \geq 1$, $t_i \to \infty$ *при* $i \to \infty$, f *обращается в ноль в точках* λ_k *с кратностью не меньшей чем* n_k *и выполнены неравенства*

$$\left|\ln|f(\lambda)\,| - \frac{\pi|\mathrm{Im}\lambda|}{\gamma}\right| \leq \varepsilon|\lambda|, \lambda \in \Big(\mathbb{C}\backslash\big(\Gamma(\delta) \cup B(0,t_1)\big)\Big) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S(0,t_i)\right),$$

$$h_f(\lambda) \leq \pi|\mathrm{Im}\lambda|/\gamma + \varepsilon|\lambda|, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Следуя работе [4], положим

$$q_\Lambda(\lambda, w, \delta) = \prod_{\lambda_k \in B(w,\delta|w|)} \left(\frac{\lambda - \lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right)^{n_k}.$$

В случае, когда круг $B(w,\delta|w|)$ не содержит ни одной λ_k, полагаем $q_\Lambda(\lambda, w, \delta) \equiv 1$. Модуль $q_\Lambda(\lambda, w, \delta)$ можно интерпретировать как меру сгущения точек $\lambda_k \in B(w,\delta|w|)$ около λ. Величина $\ln|q_\Lambda(\lambda, w, \delta)|/|w|$ аналогична по смыслу логарифму среднего геометрического (среднему арифметическому логарифмов) нормированных расстояний от $\lambda_k \in B(w,\delta|w|)$ до λ. Если $\delta \in (0.1)$, то модуль каждого сомножителя q_Λ в круге $B(w,\delta|w|)$ оценивается сверху величиной $2\big(3(1-\delta)\big)^{-1}$. Поэтому для $\delta \in (0, 1/3)$ он не превосходит единицы. Кроме того, если $\delta_1 \leq \delta_2$ и $B(w_1,\delta_1|w_1|) \subseteq B(w_2,\delta_2|w_2|)$, то число сомножителей $q_\Lambda(z, w_1, \delta_1)$ не больше числа сомножителей $q_\Lambda(z, w_2, \delta_2)$, и каждый из сомножителей $q_\Lambda(z, w_1, \delta_1)$ по модулю не меньше соответствующего сомножителя $q_\Lambda(z, w_2, \delta_2)$. Таким образом, $|q_\Lambda(z, w_1, \delta_1)| \geq |q_\Lambda(z, w_2, \delta_2)|, z \in B(w_2,\delta_2|w_2|)$. Введем еще функцию

$$q_\Lambda^m(\lambda, \delta) = \prod_{\lambda_k \in B(\lambda_m,\delta|\lambda_m|), k\neq m} \left(\frac{\lambda - \lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right)^{n_k}, m \geq 1.$$

Если круг $B(\lambda_m,\delta|\lambda_m|)$ не содержит точек $\lambda_k, k \neq m$, то $q_\Lambda^m(z, \delta) \equiv 1$. Положим (см. [4])

$$\mathcal{S}_\Lambda = \lim_{\delta\to 0} \varliminf_{m\to\infty} \ln|q_\Lambda^m(\lambda_m,\delta)|/|\lambda_m|.$$

Предел по $\delta \to 0$ существует, т.к. согласно сказанному выше функция, стоящая под знаком предела, не убывает при $\delta \to 0$. Кроме того, она не положительна, поэтому $\mathcal{S}_\Lambda \le 0$. Величина $\mathcal{S}_\Lambda$ схожа по смыслу с классическим индексом конденсации Бернштейна (см., например, [1], гл. II, §5, п. 2), но при этом эффективна для любой комплексной последовательности (а не только для измеримой положительной последовательности и комплексной последовательности нулевой плотности). Отметим еще, что коэффициент 3 при определении q_Λ выбран лишь для удобства (см. замечание к теореме 5.1 в работе [4]). Он обеспечивает неравенство $\mathcal{S}_\Lambda \le 0$.

Равенство $\mathcal{S}_\Lambda = 0$ означает, что точки λ_k в каком-то смысле отделены друг от друга. Характер этого отделения проясняется в лемме 2.3 работы [5]. Сформулируем ее в частном случае и в удобной для нас форме. Но прежде введем необходимые обозначения.

Пусть $\theta \in (0.1)$. Для каждого $k \ge 1$ через β_k обозначим минимальное расстояние от λ_k до точек $\lambda_m, m \ne k$. Фиксируем $k \ge 1$. Если $n_k \le \beta_k/2$, то положим $\gamma_k(\theta) = \theta n_k$. В противном случае полагаем $\gamma_k(\theta) = \theta\beta_k/2$.

Нетрудно заметить, что $\lim_{k\to\infty} n_k/|\lambda_k| \le \overline{n}(\Lambda)$. Поэтому согласно лемме 2.3 из работы [5] верно утверждение

Лемма 2. *Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ имеет конечную верхнюю плотность и $\mathcal{S}_\Lambda = 0$. Тогда для каждых $\varepsilon > 0, \theta \in (0.1)$ существуют $R > 0$ и $\delta \in (0, 1/3)$ такие, что для всех $|w| \ge R$ и $k \ge 1$ верно неравенство*

$$\ln|q_\Lambda(\lambda, w, \delta)| \ge -\varepsilon|\lambda|, \lambda \in B\big(\lambda_k, \gamma_k(1)\big) \backslash B\big(\lambda_k, \gamma_k(\theta)\big) \cap B(w, \delta|w|).$$

Используя лемму 2, как и в теореме 1, получаем следующий результат

Теорема 3. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ – почти вещественная последовательность, $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$ и $\mathcal{S}_\Lambda = 0$. Тогда для любых $\varepsilon_0 > 0, \delta_0 \in (0, 1/3)$ существуют $\gamma > 0$, целая функция экспоненциального типа f, номер k_0 и числа $r_k \in (0, \delta_0|\lambda_k|), k \ge k_0$, такие, что*

f обращается в ноль в точках $\lambda_k, k \ge 1$, с кратностью не меньшей чем n_k;

для всех $k \ge k_0$ в круге $B(\lambda_k, r_k)$ нет точек из Λ, отличных от λ_k;

$\ln|f(\lambda)\,| \ge \pi|\mathrm{Im}\lambda|/\gamma - \varepsilon_0|\lambda|, \lambda \in\ S(\lambda_k, r_k), k \ge k_0;$

$h_f(\lambda) \le \pi|\mathrm{Im}\lambda|/\gamma + \varepsilon_0|\lambda|, \lambda \in \mathbb{C}..$

Замечание.Нетрудно заметить, что сопряженная диаграмма K (см. [1], гл. I, §5, п.2) функции f, построенной в теоремах 1 и 3 содержит начало координат. Действительно, из симметричности нулей f следует неравенство $h_f(\lambda) \ge 0, \lambda \in \mathbb{C}$, а по теореме Полиа (см. [1], гл.I, §5, теорема 5.4) имеет место равенство $h_f(\lambda) = H_K(\lambda), \lambda \in \mathbb{C}$. Здесь

$$H_K(\lambda) = \sup_{z \in K} \operatorname{Re}(\lambda z)\,, \lambda \in \mathbb{C},$$

- опорная функция выпуклого компакта K (точнее говоря, комплексно сопряженного к K компакта).

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Максимальной плотностью Λ называется величина

$$n_0(\Lambda) = \overline{\lim_{\delta \to 0}}\, \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{n(0, r, \Lambda) - n(0, (1-\delta)r, \Lambda)}{\delta r}.$$

Для $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}$ через $\mathcal{R}^{\delta}, \delta > 0$, обозначим объединение кругов $B(\lambda, \delta|\lambda|), \lambda \in \mathcal{R}$.

Теорема 4. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ – почти вещественная последовательность, $\overline{n}(\Lambda), n_0(\Lambda) < +\infty$ и $\mathcal{S}_{\Lambda} = 0$. Тогда существует целая функция экспоненциального типа f, удовлетворяющая условиям:*

1) f обращается в ноль в точках $\lambda_k, k \geq 1$, с кратностью не меньшей чем n_k;

2) $h_f(\lambda) \leq \pi n_0(\Lambda)|\mathrm{Im}\lambda|, \lambda \in \mathbb{C}$;

3) для любых $\varepsilon > 0, \delta \in (0, 1/3)$ существует $T > 0$ такое, что $\lambda_k \in \mathcal{R}^{\delta}$, если $|\lambda_k| \geq T$, где $\mathcal{R} = \{\lambda \in \mathbb{C}: \ln|f(\lambda)| \geq \pi n_0(\Lambda)|\mathrm{Im}\lambda| - \varepsilon|\lambda|\}$.

Литература

1. Леонтьев А. Ф.. Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука, 1983. С. 176.
2. Красичков И. Ф. Сравнение целых функций конечного порядка по распределению их корней. Математический сборник. 1966. Т. 70(112). №2. С. 198–231.
3. Кривошеев А. С., Кривошеева О. А.. Замкнутость множества сумм рядов Дирихле. Уфимский математический журнал. 2013. Т.5. №3. С. 96–120.
4. Кривошеев А. С. Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях. Известия РАН. Серия математическая. 2004. Т.68. №2. С. 71–136.
5. Кривошеев А. С., Кривошеева О. А.. Базис в инвариантном подпространстве целых функций. Алгебра и анализ. 2015. Т.27. №2. С.132–195.

Статья рекомендована к печати факультетом математики и информационных технологий БашГУ (докт. физ.-мат. наук, проф. З. Ю. Фазуллин)

A construction of special entire functions of exponential type

O. A. Krivosheeva

Bashkir State University
32 ZakiValidist., 450074 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

Email: kriolesya2006@yandex.ru

This work is devoted to the construction of entire functions of exponential type which vanishes on almost real sequence and have a growth which is close to regular.

Keywords: invariant subspace, almost real sequence, entire function of exponential type.