О построении областей устойчивости точек равновесия дифференциальных уравнений

М. Г. Юмагулов[1]*, Л. С. Ибрагимова[2], И. Ж. Мустафина[1]

[1] Башкирский государственный университет
Россия, Республика Башкортостан, г. Уфа, 450076, ул. Заки Валиди, 32.

[2] Башкирский государственный аграрный университет
Россия, 450001, г. Уфа, ул.50-летия Октября, 34

**Email: yum_mg@mail.ru*

В работе предлагается новый общий подход, позволяющий изучать задачу построения областей устойчивости нелинейных дифференциальных уравнений. Подход основан на модификации метода М. Розо исследования устойчивости линейных систем с периодическими коэффициентами, зависящими от малого параметра и асимптотических формулах теории возмущений линейных операторов. Получены приближенные формулы, описывающие границы областей устойчивости.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, точки равновесия, периодические решения, устойчивость, область устойчивости, малый параметр, асимптотические формулы.

В статье рассматривается задача о построении областей устойчивости и гиперболичности точек равновесия дифференциальных уравнений, зависящих от параметров. Основными объектами исследования являются автономные и неавтономные периодические системы вида

$$\frac{dx}{dt} = A(\alpha,\beta)x + a(x,\alpha,\beta), x \in R^2, (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t,\alpha,\beta)x + a(x,t,\alpha,\beta), x \in R^2. (2)$$

В уравнении (1) предполагается, что постоянная матрица $A(\alpha,\beta)$ и функция $a(x,\alpha,\beta)$ гладко зависят от двух скалярных параметров α и β, а нелинейность $a(x,\alpha,\beta)$ гладко зависит от x и равномерно по параметрам α и β удовлетворяет соотношению

$$\left|\left|a(x,\alpha,\beta)\right|\right| = O(||x||^2) \text{ при } ||x|| \to 0.$$

В уравнении (2) предполагается, что матрица $A(t,\alpha,\beta)$ и функция $a(x,t,\alpha,\beta)$ гладко зависят от двух скалярных параметров α и β и непрерывны по t, а нелинейность $a(x,t,\alpha,\beta)$ гладко зависит от x и равномерно по t, α и β удовлетворяет соотношению:

$\left|\left|a(x,t,\alpha,\beta)\right|\right| = O(||x||^2)$ при $\left|\left|x\right|\right| \to 0$. При этом матрица $A(t,\alpha,\beta)$ и функция $a(x,t,\alpha,\beta)$ являются T–периодическими по t .

Уравнения (1) и (2) при всех значениях параметров α и β имеют точку равновесия $x = 0$, которая при одних значениях параметров может быть устойчивой, а при других – неустойчивой. Связное множество G в плоскости параметров (α,β) будем называть областью устойчивости (областью неустойчивости) точки равновесия $x = 0$ системы (1) или (2), если для любого $(\alpha,\beta) \in G$ эта точка является устойчивой (неустойчивой). Границы областей устойчивости и неустойчивости, как правило, представляют собой некоторые кривые γ, при переходе через которые в окрестности точки равновесия $x = 0$ системы (1) или (2) возможны различные бифуркационные явления (см., например, [1–3]). Аналогично определяются понятия области гиперболичности.

Задача о построении областей устойчивости и неустойчивости и границ между ними является одной из важных и интересных задач теории дифференциальных уравнений и ее приложений. Здесь предложены эффективные методы исследования, решен ряд важных с теоретической и практической точек зрения задач (см., например, [3–6] и имеющуюся там библиографию). Следует отметить, что большинство известных работ относится к автономным уравнениям [7–11]. Существенно менее изучены эти задачи для неавтономных уравнений с периодическими коэффициентами, хотя к таким задачам приводят многие важные вопросы теории и практики. Основная проблема здесь в сложности задачи построения мультипликаторов, явное построение которых возможно лишь в самых простых случаях. Известные результаты, как правило, относятся к исследованию конкретных уравнений (см. [5, 6.12]).

В настоящей статье предлагается новый общий подход, позволяющий получать приближенные формулы в задаче построения границ областей устойчивости систем (1) и (2). Подход основан на модификации метода М. Розо [13] и асимптотических формулах теории возмущений линейных операторов [14].

Предлагаемый в статье подход может быть модифицирован и для решения поставленных задач в более общих условиях. Например, для ситуаций, когда системы (1) и (2) являются N–мерными, т.е. в них $x \in R^N$, или для уравнений, заданных в комплексном пространстве C^N.

2. Автономное уравнение

Рассмотрим сначала автономное уравнение (1). Предполагается, что при некоторых $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$ матрица $A_0 = A(\alpha_0,\beta_0)$ удовлетворяет одному из условий:

1^0. A_0 имеет простое собственное значение 0, а другое ее собственное значение является отрицательным;

2^0. A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$.

В этих условиях, как правило, точка (α_0, β_0) лежит на границе γ_0 областей устойчивости G_sи неустойчивости G_n системы (1). Приведем подход, позволяющий локально определить границу γ_0 и области G_s и G_n .

2.1. Случай $\mathbf{1^0}$. Пусть сначала выполнено условие 1^0. Обозначим через e и g собственные векторы матрицы A_0 и транспонированной матрицы A_0^* соответственно, отвечающие собственному значению 0. Эти векторы можно считать нормированными равенствами: $||e|| = 1$ и $(e, g) = 1$. Здесь и ниже символ $(\cdot,\cdot)$ обозначает скалярное произведение векторов.

Положим $\zeta_1 = (A'_\alpha e, g), \zeta_2 = \left(A'_\beta e, g\right)$; здесь A'_α и A'_β – производные матрицы $A(\alpha, \beta)$, вычисленные в точке (α_0, β_0). Ниже будем предполагать, что выполнено соотношение:

$\zeta_1^2 + \zeta_2^2 \neq 0.$ (3)

Тогда уравнение

$\zeta_1 \cos\varphi + \zeta_2 \sin\varphi = 0$ (4)

имеет на промежутке $0 \leq \varphi < 2\pi$ в точности два решения $\varphi = \varphi^*$и $\varphi = \varphi^* + \pi$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1^0 и (3). Пусть φ^*– решение уравнения (4). Тогда:

– через точку (α_0, β_0) плоскости (α, β) проходит единственная гладкая кривая γ_0, являющаяся границей областей устойчивости G_s и неустойчивости G_n точки равновесия $x = 0$ системы (1);

–параметрически заданная прямая $\alpha = \alpha_0 + \mu\cos\varphi^*, \beta = \beta_0 + \mu\sin\varphi^*$ является касательной к кривой γ_0.

Зададимся произвольным $\varphi_0 \in [0.2\pi)$ таким, чтобы $\lambda_0 = \zeta_1\cos\varphi_0 + \zeta_2\sin\varphi_0 \neq 0$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1^0 и (3). Тогда решение$x = 0$ системы (1) будет асимптотически устойчивым при всех малых

$|\mu|$ таких, что $\mu\lambda_0 < 0$; оно будет неустойчивым, если $\mu\lambda_0 > 0$.

Другими словами, параметрически заданная прямая $\alpha = \alpha_0 + \mu\cos\varphi_0, \beta = \beta_0 + \mu\sin\varphi_0$

при малых $|\mu|$ содержится в области устойчивости G_s (в области неустойчивости G_n) точки равновесия $x = 0$ системы (1), если $\mu\lambda_0$<0 (если $\mu\lambda_0$>0).

2.2. Случай $\mathbf{2^0}$. Рассмотрим теперь случай, когда выполнено условие 2^0. В этом случае существуют ненулевые векторы $e, g, e^*, g^* \in R^2$ такие, что выполняются равенства:

$$A_0(e + ig) = i\omega_0(e + ig), A_0^*(e^* + ig^*) = -i\omega_0(e^* + ig^*).$$

Эти векторы можно считать нормированными равенствами:

$$\left||e|\right| = \left||g|\right| = 1, (e, e^*) = (g, g^*) = 1, (e, g^*) = (g, e^*) = 0.$$

Положим

$$\eta_1 = (A'_\alpha e, e^*) + (A'_\alpha g, g^*), \eta_2 = \left(A'_\beta e, e^*\right) + \left(A'_\beta g, g^*\right);$$

здесь A'_α и A'_β – производные матрицы $A(\alpha, \beta)$, вычисленные в точке (α_0, β_0). Ниже будем предполагать, чтовыполнено соотношение:

$\eta_1^2 + \eta_2^2 \neq 0.$ (5)

Тогда уравнение

$\eta_1 \cos\varphi + \eta_2 \sin\varphi = 0$ (6)

имеет на промежутке $0 \leq \varphi < 2\pi$ в точности два решения $\varphi = \varphi^*$и $\varphi = \varphi^* + \pi$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия 2^0и (5). Пусть φ^* – решение уравнения (6). Тогда:

– через точку (α_0, β_0) плоскости (α, β) проходит единственная гладкая кривая γ_0, являющаяся границей областей устойчивости G_s и неустойчивости G_n точки равновесия $x = 0$ системы (1);

–параметрически заданная прямая $\alpha = \alpha_0 + \mu\cos\varphi^*, \beta = \beta_0 + \mu\sin\varphi^*$ является касательной к кривой γ_0.

Зададимся произвольным $\varphi_0 \in [0.2\pi)$ таким, чтобы $\lambda_0 = \eta_1\cos\varphi_0 + \eta_2\sin\varphi_0 \neq 0$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия 2^0 и (5). Тогда решение $x = 0$ системы (1) будет асимптотически устойчивым при всех малых $|\mu|$ таких, что $\mu\lambda_0 < 0$; оно будет неустойчивым, если $\mu\lambda_0 > 0$.

Другими словами, параметрически заданная прямая $\alpha = \alpha_0 + \mu\cos\varphi_0, \beta = \beta_0 + \mu\sin\varphi_0$

при малых $|\mu|$ содержится в области устойчивости G_s (в области неустойчивости G_n) точки равновесия $x = 0$ системы (1), если $\mu\lambda_0 < 0$ (если $\mu\lambda_0 > 0$).

3. Неавтономное уравнение

Рассмотрим теперь неавтономное уравнение (2). Для простоты будем предполагать, что при $\alpha = \alpha_0$и $\beta = \beta_0$ матрица $A_0 = A(t, \alpha_0, \beta_0)$ от t не зависит. В этом случае матрица $A(t, \alpha, \beta)$ может быть представлена в виде:

$A(t, \alpha, \beta) = A_0 + (\alpha - \alpha_0)A_1(t) + (\beta - \beta_0)B_1(t) + A_2(\alpha, \beta, t)$, (7)

где A_0 –постоянная матрица, матрицы$A_1(t)$, $B_1(t)$ и $A_2(\alpha, \beta, t)$ являются T–периодическими по t, при этом матрица $A_2(\alpha, \beta, t)$ равномерно по t удовлетворяет соотношению:

$$\left||A_2(\alpha, \beta, t)|\right| = O((\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2)$$

при $(\alpha, \beta) \to (\alpha_0, \beta_0)$.

Будем считать, что для матрицы A_0 выполнено одно изуказанных в п. 2.2 условий 1^0 или 2^0.

3.1. Случай $\mathbf{1^0}$. Пусть сначала выполнено условие 1^0. Как и выше, обозначим через e и g собственные векторы матрицы A_0 и транспонированной матрицы A_0^* соответственно, отвечающие собственному значению 0 (см. п. 2.1).

Положим

$$\zeta_1 = \int_0^T (A_1(t)e, g)dt, \zeta_2 = \int_0^T (B_1(t)e, g)dt.$$

Ниже будем предполагать, что выполнено соотношение:

$\zeta_1^2 + \zeta_2^2 \neq 0.$ (8)

Тогда уравнение

$\zeta_1 \cos\varphi + \zeta_2 \sin\varphi = 0$ (9)

имеет на промежутке $0 \leq \varphi < 2\pi$ в точности два решения $\varphi = \varphi^*$и $\varphi = \varphi^* + \pi$.

Теорема 5. Пусть выполнены условия 1^0 и (8). Пусть φ^* – решение уравнения (9). Тогда:

–через точку (α_0, β_0) плоскости (α, β) проходит единственная гладкая кривая γ_0, являющаяся границей областей устойчивости G_s и неустойчивости G_n точки равновесия $x = 0$ системы (2);

–параметрически заданная прямая $\alpha = \alpha_0 + \mu\cos\varphi^*, \beta = \beta_0 + \mu\sin\varphi^*$ является касательной к кривой γ_0.

Зададимся произвольным $\varphi_0 \in [0.2\pi)$ таким, чтобы $\lambda_0 = \zeta_1\cos\varphi_0 + \zeta_2\sin\varphi_0 \neq 0$.

Теорема 6. Пусть выполнены условия 1^0 и (8). Тогда решение$x = 0$ системы (2) будет асимптотически устойчивым при всех малых $|\mu|$ таких, что $\mu\lambda_0 < 0$; оно будет неустойчивым, если $\mu\lambda_0 > 0$.

Другими словами, параметрически заданная прямая $\alpha = \alpha_0 + \mu\cos\varphi_0, \beta = \beta_0 + \mu\sin\varphi_0$

при малых $|\mu|$ содержится в области устойчивости G_s (в области неустойчивости G_n) точки равновесия $x = 0$ системы (2), если $\mu\lambda_0 < 0$ (если $\mu\lambda_0 > 0$).

3.2. Случай $\mathbf{2^0}$. Рассмотрим теперь случай, когда для системы (2) выполнено условие 2^0. Другими словами, пусть матрица A_0 из (7) имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$.

В неавтономном случае условие 2^0 следует разделять на два случая:

2.1^0. A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$ и $\omega_0 \neq \frac{\pi k}{T}$, k –натуральное число;

2.2^0. A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 = \frac{\pi k}{T}$ при некотором натуральном k.

Случай 2.1^0 будем называть нерезонансным, а случай 2.2^0 – резонансным. Здесь ограничимся рассмотрением только нерезонансного случая. Как и выше, обозначим через $e, g, e^*, g^* \in R^2$ собственные векторы матрицы A_0 и транспонированной матрицы A_0^* соответственно, отвечающие собственному значению $\pm i\omega_0$ (см. п.2.2).

Положим

$$\eta_1 = \int_0^T [(A_1(t)e, e^*) + (A_1(t)g, g^*)]dt,\ \eta_2 = \int_0^T [(B_1(t)e, e^*) + (B_1(t)g, g^*)]dt.$$

Ниже будем предполагать, что выполнено соотношение:

$\eta_1^2 + \eta_2^2 \neq 0.$ (10)

Тогда уравнение

$\eta_1 \cos\varphi + \eta_2 \sin\varphi = 0$ (11)

имеет на промежутке $0 \leq \varphi < 2\pi$ в точности два решения $\varphi = \varphi^*$и $\varphi = \varphi^* + \pi$.

Теорема 7. Пусть выполнены условия 2.1^0 и (10). Пусть φ^* – решение уравнения (11). Тогда:

–через точку (α_0, β_0) плоскости (α, β) проходит единственная гладкая кривая γ_0, являющаяся границей областей устойчивости G_s инеустойчивости G_n точки равновесия $x = 0$ системы (2);

–параметрически заданная прямая $\alpha = \alpha_0 + \mu\cos\varphi^*, \beta = \beta_0 + \mu\sin\varphi^*$ является касательной к кривой γ_0.

Зададимся произвольным $\varphi_0 \in [0.2\pi)$ таким, чтобы $\lambda_0 = \eta_1\cos\varphi_0 + \eta_2\sin\varphi_0 \neq 0$.

Теорема 8. Пусть выполнены условия 2.1^0 и (10). Тогда решение $x = 0$ системы (2) будет асимптотически устойчивым при всех малых $|\mu|$ таких, что $\mu\lambda_0 < 0$; оно будет неустойчивым, если $\mu\lambda_0 > 0$.

Другими словами, параметрически заданная прямая $\alpha = \alpha_0 + \mu\cos\varphi_0, \beta = \beta_0 + \mu\sin\varphi_0$

при малых $|\mu|$ содержится в области устойчивости G_s (в области неустой-чивости G_n) точки равновесия $x = 0$ системы (2), если $\mu\lambda_0 < 0$ (если $\mu\lambda_0 > 0$).

В настоящей работе приведен подход, позволяющий в явном виде строить касательные к границам областей устойчивости точек равновесия дифференциальных уравнений (1) и (2). Указанный подход может быть развит в направлении построения границ областей устойчивости более высокого порядка точности.

Литература

1. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва-Ижевск: Ин-т компьют. исслед. 2002. 560 с.
2. Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. 2000. 400 с.
3. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. – Москва-Ижевск: Ин-т компьют. исслед. 2009. 548 с.
4. Chiang H. D., Alberto L. F. Stability regions of nonlinear dynamical systems: theory, estimation, and applications. Cambridge University Press. 2015. 484p.
5. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука. 1967. 472 с.
6. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука. 1972. 720 с.
7. Loccufier M., Noldus E. A new trajectory reversing method for estimating stability regions of autonomous nonlinear systems // Nonlinear Dynamics. V. 21. 2000. P. 265–288.
8. Chiang H. D., Hirsch M. W., Wu F. F. Stability regions of nonlinear autonomous dynamical systems. // Institute of Electrical and Electronics Engineers Trans. on Automatic Control, 33, №1.1988. P 16–27.
9. Amaral F. M., Alberto L. F. C. Stability Boundary Characterization of Nonlinear Autonomous Dynamical Systems in the Presence of a Saddle Node Equilibrium Point. // Tend. Mat. Apl. Comput. V. 13. №2. 2012. P. 143–154.
10. Красносельский М. А., Кузнецов Н. А., Юмагулов М. Г. Функционализация параметра и асимптотика циклов в бифуркации Хопфа. // Автоматика и телемеханика. 1996. №11. С.22–28. // Автоматика и телемеханика. 1996. №12. С.24–30.
11. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1964. 477с.
12. Розо М. Нелинейные колебания и теория устойчивости. М.: Наука. 1971. 288с.
13. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир. 1975. 740с.
14. Красносельский М. А., Юмагулов М. Г. Метод функционализации параметра в проблеме собственных значений.// ДАН России. Том 365. №2. 1999. С.162–164.

Статья рекомендована к печати кафедрой дифференциальных уравнений БашГУ (докт. физ.-мат. наук, проф. М. Г.Юмагулов)

About construction stability regions of equilibrium points of differential equations

M. G. Yumagulov[1*], L. S. Ibragimova[2], I. G. Mustafina[1]

[1] Bashkir State University
450074, Russia, Ufa, Z. Validy str., 32

[2] Bashkir State Agrarian University
450001, Russia, Ufa, 50- anniversary of October str., 34

**Email: yum_mg@mail.ru*

The paper proposes a new general approach that allows to study the problem of constructing stability regions of nonlinear differential equations. The approach is based on a modification of the method of M. Rozo for the study of stability of linear systems with periodic coefficients depending on a small parameter and asymptotic formulas of the perturbation theory of linear operators. The approximate formulas describing the boundary of the stability regions.

Keywords: differential equation, equilibrium points, periodic solutions, stability, stability region, small parameter, asymptotic formula.